Exercice :

Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

1°) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2°) a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

b) Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?

.) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$

$0 < n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$

$\Rightarrow \sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$